

1. Αν ξέρετε ότι η πρόταση  $P \Rightarrow Q$  είναι ψευδής, βρείτε τις τιμές αληθείας των

1.  $P \vee Q$
2.  $P \wedge Q$
3.  $Q \Rightarrow P$

2. Τρεις ύποπτοι οι Α, Β, Γ δίνουν τις εξής καταθέσεις:

Ο Α λέει «Ο Β είναι ένοχος και ο Γ είναι αθώος»

Ο Β λέει «Αν ο Α είναι ένοχος τότε και ο Γ είναι ένοχος»

Ο Γ λέει «Εγώ είμαι αθώος και τουλάχιστον ένας από τους άλλους δύο είναι ένοχος».

Έστω οι παρακάτω προτάσεις :

$P =$  Ο Α είναι αθώος

$Q =$  Ο Β είναι αθώος

$R =$  Ο Γ είναι αθώος

1. Γράψτε τις τρεις καταθέσεις χρησιμοποιώντας τις προτάσεις  $P, Q, R$ .
2. Μπορούν και οι τρεις καταθέσεις να είναι συγχρόνως αληθείς; Αν ναι, τότε ποιός είναι αθώος και ποιός είναι ένοχος;
3. Αν υποθέσουμε ότι και οι τρεις ύποπτοι είναι αθώοι, ποιός έδωσε αληθή και ποιός ψευδή κατάθεση;
4. Αν υποθέσουμε ότι ο αθώος λέει αλήθεια και ο ένοχος ψέματα, τότε ποιός είναι αθώος και ποιός ένοχος;

3. Αποδείξτε με απαγωγή σε άτοπο τις παρακάτω προτάσεις.

1. Δεν υπάρχει μέγιστος ακέραιος.
2. Αν  $mn$  είναι περιττός ακέραιος τότε και οι δύο  $m, n$  είναι περιττοί.
3. Αν  $y, x \in \mathbb{R}$  και  $y \leq x + \epsilon$  για κάθε  $\epsilon > 0$  τότε  $y \leq x$ .

4. Αποδείξτε με επαγωγή ότι τα επόμενα ισχύουν για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ ,

1. 133 διαιρεί το  $(11^{n+1} + 12^{2n-1})$ ,
2.  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$ .

Επιπλέον ασκήσεις για δική σας εξάσκηση.

1. Δείξτε ότι είναι ταυτολογίες οι επόμενες:

1.  $((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow R)$
2.  $((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \wedge R))$

2. Για τα επόμενα ζευγάρια προτάσεων εξετάστε αν είναι ισοδύναμα ή αν ένα από τα δύο συνεπάγεται το άλλο. (Φτιάξτε πίνακες αληθείας όπου χρειάζεται.)

1.  $P \Rightarrow Q$  και  $\neg P \wedge Q$
2.  $P \Leftrightarrow Q$  και  $(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)$
3.  $\neg Q \Rightarrow P$  και  $\neg P \Rightarrow \neg Q$
4.  $P \wedge \neg Q$  και  $(\neg P) \vee (\neg Q)$