

ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ
Εαρινό Εξάμηνο 2017
Διδάσκων: Ι. Α. Αντωνιάδης

Φυλλάδιο 1

Άσκηση 1. Έστω $(R, +, \cdot)$ δακτύλιος. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in R$ ισχύουν:

i) $-(-a) = a$

ii) $-0 = 0$

iii) $-(a + b) = (-a) + (-b)$

iv) $(-a)b = a(-b) = -ab$

Άσκηση 2. Έστω $(R, +, \cdot)$ δακτύλιος. Να αποδείξετε ότι:

i) $a(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = ab_1 + \dots + ab_n$

ii) $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)b = a_1b + \dots + a_nb$

Άσκηση 3. Αν $(R, +, \cdot)$ δακτύλιος, ορίζουμε μία (εξωτερική) πράξη

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times R &\rightarrow R \\ (n, a) &\mapsto na \end{aligned}$$

$$\text{ως εξής: } na = \begin{cases} \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ φορές}}, & \text{αν } n > 0 \\ 0, & \text{αν } n = 0 \\ -(-n)a & \text{αν } n < 0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $n(ab) = (na)b = a(nb)$

ii) $(mn)a = m(na) = n(ma)$

Άσκηση 4. Έστω $(R, +, \cdot)$ δακτύλιος. Ορίζουμε την διαφορά δύο στοιχείων $a - b := a + (-b)$. Να αποδείξετε ότι ισχύουν:

i) $(a - b)c = ac - bc, \forall a, b, c \in R$

ii) $a(b - c) = ab - ac, \forall a, b, c \in R$

Άσκηση 5. Να αποδείξετε ότι το σύνολο

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο, αλλά όχι σώμα.

Άσκηση 6. Να αποδείξετε ότι το σύνολο

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

είναι σώμα.