M2426 – Εφαρμοσμένη Άλγεβρα

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

February 8, 2017

1. Έστω φυσικός αριθμός $n > 1$, ο οποίος είναι ελεύθερος τετραγώνων. Δίνεται η ακέραια περιοχή $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}] = \{a + b\sqrt{-n} \, : \, a, b \in \mathbb{Z}\}$. Δείξτε ότι $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]^\times = \{-1, 1\}$.

2. Με δεδομένη την άσκηση (1), υποθέστε ότι το n δεν είναι ρητός πρώτος και έστω p ένας (ρητός) πρώτος διαιρέτης του n.
   (a) Δείξτε ότι το p δεν είναι πρώτος του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.
   (b) Δείξτε ότι το p είναι ανάγωγο στοιχείο του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.

3. Με δεδομένη την άσκηση (1), υποθέστε ότι το $n + 1$ δεν είναι ρητός πρώτος και έστω p ένας (ρητός) πρώτος διαιρέτης του $n + 1$.
   (a) Δείξτε ότι το p δεν είναι πρώτος του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.
   (b) Δείξτε ότι το p είναι ανάγωγο στοιχείο του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.

4. Έστω $n > 2$ φυσικός αριθμός ελεύθερος τετραγώνων. Δείξτε ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$ δεν είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών.

5. Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Αποδείξτε ότι η R είναι σώμα αν και μόνο αν έχει μόνο δύο ιδεώδη (τα $\{0\}$ και R).

6. Έστω R ακέραια περιοχή και $a, b \in R$. Συμβολίζουμε με $(a) = aR$ και $(b) = bR$ τα κύρια ιδεώδη που παράγουν τα a, b αντίστοιχα.
   (a) Δείξτε ότι $a|b \iff (b) \subseteq (a)$.
   (b) Δείξτε ότι τα a, b είναι συνεταιρικά (συμβ. $a \sim b$) αν και μόνο αν $(a) = (b)$.
   (c) Βρείτε όλα τα γνήσια ιδεώδη I του $\mathbb{Z}$ για τα οποία ισχύει $(24) \subseteq I$. Ποιά από αυτά είναι μεγιστικά;
   (d) Βρείτε όλα τα γνήσια ιδεώδη I του $\mathbb{Q}[X]$ για τα οποία ισχύει $(X^3 - 4X^2 + 5X - 2) \subseteq I$. Ποιά από αυτά είναι μεγιστικά;

7. Συμβολίζουμε με $(m_1, \ldots, m_k)$ το ιδεώδες του $\mathbb{Z}$ που παράγεται από τα $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}$.
   (a) Υπολογίστε ένα ακέραιο m τέτοιο ώστε $(4, 6) = (m)$.
   (b) Υπολογίστε ένα ακέραιο m τέτοιο ώστε $(4) \cap (6) = (m)$.
   (c) Υπολογίστε όλους τους ακεραίους $m \in \mathbb{Z}$ για τους οποίους $(4) \cap (6) \subseteq (m)$.