Θεώρημα Αν $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f_n συνεχείς στο $[a,b]$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$, τότε

$$x_n \to x \implies f_n(x_n) \to f(x)$$

(για κάθε ακολουθία $x_n \in [a,b]$). (άσκηση 8.2, σημ. Μήτση)

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to x \\ x_n \in [a,b] \end{array}\right\} \quad \underline{x \in [a,b]}$$

$$a \leq \underbrace{x_n \leq b}$$

$$\downarrow$$

$$a \leq x \leq b$$

$$|f_n(x_n) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\underline{\varepsilon > 0}$: $\exists n_0$: $n \geq n_0$

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq \varepsilon .$$

$$|f_n(x_n) - f(x)| = |\underbrace{f_n(x_n) - f(x_n)} + \underbrace{f(x_n) - f(x)}|$$

$$\leq \underbrace{|f_n(x_n) - f(x_n)|}_{I} + \underbrace{|f(x_n) - f(x)|}_{II}$$

Θέλουμε $I \leq \varepsilon/2$, $II \leq \varepsilon/2$.

$f_n \to f$ ομ

$$I \leq \rho(f_n, f) = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$$

$\exists n_0 :\ n \geq n_0 \Rightarrow \rho(f_n, f) \leq \varepsilon/2$ άρα και $I \leq \varepsilon/2$

$$n \geq n_0 \Rightarrow I \leq \varepsilon/2$$

$II = |f(x_n) - f(x)| \le \varepsilon/2$ f συνεχής

(συνέπεια του f_n συνεχείς + ομ. σύγκλιση)

$\exists \delta : |y - x| \le \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \le \varepsilon/2$

$x_n \to x$ άρα $\exists\, n_1 : n \ge n_1 \Rightarrow |x_n - x| \le \delta$.

και άρα $n \ge n_1 \Rightarrow |f(x_n) - f(x)| \le \varepsilon/2$

$$n \ge n_1 \Rightarrow II \le \varepsilon/2 .$$

Επιλέγουμε $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Αν $n \ge n_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} n \ge n_0 \\ n \ge n_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} I \le \varepsilon/2 \\ II \le \varepsilon/2 \end{matrix}\right\} I + II \le \varepsilon . \quad ✓$$