M2426 – Εφαρμοσμένη Άλγεβρα

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

March 8, 2017

1. Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένη ακέραια περιοχή είναι σώμα.
   Υπόδειξη: αν R είναι μία πεπερασμένη ακέραια περιοχή και $0 \neq a \in R$, εξετάστε την απεικόνιση $\phi : R \longrightarrow R$ με $\phi(x) = ax$.

2. Έστω G αβελιανή ομάδα και $\alpha, \beta \in G$ με τάξεις $\mathrm{ord}(\alpha) = n$, $\mathrm{ord}(\beta) = m$, με $(n, m) = 1$. Δείξτε ότι $\mathrm{ord}(\alpha\beta) = nm$. Διατυπώστε και αποδείξτε τη γενίκευση της πρότασης για k στοιχεία.

3. Έστω $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ πεπερασμένη αβελιανή ομάδα τάξης n. Ορίζουμε τον εκθέτη της G ως το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των στοιχείων της G, δηλαδή $\exp(G) = \varepsilon\kappa\pi(g_1, \ldots, g_n)$.
   (a) Δείξτε ότι $\exp(G)|n$.
   (b) Δείξτε ότι $\mathrm{ord}(g_i)|\exp(G)$ για κάθε $1 \leq i \leq n$.
   (c) Δείξτε ότι υπάρχει στοιχείο της G με τάξη ίση με $\exp(G)$.
   (d) Δείξτε ότι η G είναι κυκλική αν και μόνο αν $\exp(G) = n$.

4. Έστω F σώμα, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ και $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in F[X]$. Ορίζουμε την παράγωγο του πολυωνύμου f να είναι το πολυώνυμο $f' = \sum_{i=0}^{n} i a_i X^{i-1} \in F[X]$. Ειδικότερα, $f' = 0$ εάν $f = 0$ ή $\deg(f) = 0$. Αποδείξτε τα παρακάτω:
   (a) Για κάθε $f, g \in F[X]$, $(f + g)' = f' + g'$.
   (b) Για κάθε $c \in F$, και κάθε $f \in F[X]$, $(cf)' = cf'$.
   (c) Για κάθε $f, g \in F[X]$, $(fg)' = f'g + fg'$.

5. Έστω F ένα σώμα χαρακτηριστικής p. Θα δείξουμε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in F$ ισχύει $(\alpha + \beta)^p = \alpha^p + \beta^p$. Γνωρίζουμε ότι το F είναι επέκταση του $\mathbb{F}_p$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(X) = (X + 1)^p - X^p - 1 \in F[X]$.
   (a) Δείξτε ότι $\deg(f) \leq p - 1$ και $f(a) = 0$ για κάθε $a \in \mathbb{F}_p$.
   (b) Δείξτε ότι $(X + 1)^p = X^p + 1$.
   (c) Δείξτε ότι $(\alpha + \beta)^p = \alpha^p + \beta^p$ για κάθε $\alpha, \beta \in F$.

6. Δίνεται το πολυώνυμο $f(X) = X^3 - X - 1 \in \mathbb{F}_3[X]$.
   (a) Δείξτε ότι το f είναι ανάγωγο στο δακτύλιο $\mathbb{F}_3[X]$.
   (b) Εάν α είναι μία ρίζα του f, βρείτε το βαθμό της επέκτασης $\mathbb{F}_3(\alpha)/\mathbb{F}_3$ και δύο βάσεις της.
   (c) Δείξτε ότι και το πολυώνυμο $g(X) = X^3 - X + 1$ είναι ανάγωγο στον $\mathbb{F}_3[X]$. Δείξτε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα του στο σώμα $\mathbb{F}_3(\alpha)$.
   (d) Δείξτε ότι καμία ρίζα του πολυωνύμου $h(X) = X^2 + 1$ δεν ανήκει στο $\mathbb{F}_3(\alpha)$.