ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ
Εαρινό Εξάμηνο 2017
Διδάσκων: Ι. Α. Αντωνιάδης

Φυλλάδιο 6

***Άσκηση* 1.** *Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο* $f(X) = X^{100} - 1573 \in \mathbb{Q}[X]$ *είναι ανάγωγο στο* $\mathbb{Q}[X]$.

***Άσκηση* 2.** *Να αποδείξετε ότι τα στοχεία* $11 + 7i$ *και* $18 - i$ *του* $\mathbb{Z}[i]$ *είναι πρώτα μεταξύ τους.*

***Άσκηση* 3.** *Να εξετάσετε αν το* $1 + 2\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ *είναι ανάγωγο στοιχείο του δακτυλίου. Αν ναι, είναι πρώτο στοιχείο του δακτυλίου;*

***Άσκηση* 4.** *Να υπολογισθεί ο ΜΚΔ των παρακάτω πολυωνύμων στο* $K[X]$. *Στη συνέχεια να βρεθούν* $a(X), b(X) \in K[X]$ *ώστε* *ΜΚΔ(*$f(X)$, $g(X)$*)*$=a(X)f(X) + b(X)g(X)$.

i) $f(X) = X^5 + 1,$	$g(X) = X^3 + 1,$	$K = \mathbb{Q}$
ii) $f(X) = X^3 - X^2 - X + 1,$	$g(X) = X^3 + 4X^2 + X - 6,$	$K = \mathbb{Q}$
iii) $f(X) = X^3 - X^2 - X + 1,$	$g(X) = X^3 + 4X^2 + X - 6,$	$K = \mathbb{Z}_5$
iv) $f(X) = 2X^3 + 6X^2 + 4X + 5,$	$g(X) = 3X^2 + 2,$	$K = \mathbb{Q}$
v) $f(X) = 2X^3 + 6X^2 + 4X + 5,$	$g(X) = 3X^2 + 2,$	$K = \mathbb{Z}_7$
vi) $f(X) = X^3 - iX^2 + 4X - 4i,$	$g(X) = X^2 + 1,$	$K = \mathbb{C}$

***Άσκηση* 5.** *Στο* $\mathbb{Z}[X]$ *θεωρούμε τα* $f(X) = X^5 + 3X^4 + X^3 + 4X^2 - 3X - 1$, $g(X) = X^2 + X + 1$. *Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο διαίρεσης δείξτε ότι το* $f(X)$ *δεν διαιρείται με το* $g(X)$. *Αν όμως θεωρήσουμε τα πολυώνυμα αυτά στο* $\mathbb{Z}_5[X]$ *αποδείξτε ότι το* $f(X)$ *διαιρείται με το* $g(X)$.

***Άσκηση* 6.** *Στο* $\mathbb{Z}_p[X]$, *όπου* p *είναι ένας πρώτος, έστω* $f(X) = 2X^3 - 3X^2 + X + 6$, $g(X) = X^2 - 2X$. *Για ποιούς πρώτους* p *το υπόλοιπο της διαίρεσης του* $f(X)$ *με το* $g(X)$
i) Είναι μηδενικό;
ii) Έχει μη μηδενικό σταθερό όρο;

***Άσκηση* 7.** *Στο* $\mathbb{Z}_p[X]$, *όπου* p *είναι ένας πρώτος, έστω* $f(X) = X^3 - 4X^2 + 3X$, $g(X) = X^2 - 3X + 2$. *Για ποιούς πρώτους* p *ο βαθμός του ΜΚΔ(*$f(X)$, $g(X)$*) είναι*

i) 2;
ii) 1;
iii) 0;

***Άσκηση* 8.** *Εφαρμόστε τον αλγόριθμο διαίρεσης στα πολυώνυμα* $f(X,Y) = X^2Y^2 - XY + 1$, $g(X,Y) = X^2 - Y$ *θεωρώντας αυτά ως στοιχεία του*
i) $(\mathbb{Q}[X])[Y]$
ii) $(\mathbb{Q}[Y])[X]$