

ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ
Εαρινό Εξάμηνο 2017
Διδάσκων: Ι. Α. Αντωνιάδης

Πρόοδος
Ομάδα Ι
Ηράκλειο 5-4-2017

Θέμα 1. *a) Να εξεταστεί αν το πολυώνυμο $f(X) = X^5 - 15X^4 + 30X^2 - 105X + 255 \in \mathbb{Z}[X]$ είναι ανάγωγο στον δακτύλιο $\mathbb{Q}[X]$.*

b) Να γράψετε ένα πολυώνυμο $f(X) \in \mathbb{Z}[x]$ βαθμού 97 τέτοιο ώστε το $f(X)$ να είναι ανάγωγο στον $\mathbb{Q}[X]$.

Θέμα 2. *Να αναλύσετε σε γινόμενο αναγώνων παραγόντων το πολυώνυμο $X^8 - 1 \in \mathbb{Z}[X]$.*

Θέμα 3. *Έστω R η ακεραία περιοχή $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Να αποδείξετε ότι η R είναι περιοχή ανάλυσης. Να αποδείξετε ότι το 2 είναι ανάγωγο στοιχείο του R . Είναι πρώτο στοιχείο αυτού; Τί συμπεραίνετε για την περιοχή R ;*

Θέμα 4. *Στον δακτύλιο $R = \mathbb{Z}[X, Y]$ το κύριο ιδεώδες*

$$A = \langle 2 \rangle = 2R = \{2f(X, Y) \mid f(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y]\}$$

είναι πρώτο; Είναι maximal;

Θέμα 5. *Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο (όπως πάντα $1_R \neq 0_R$). Να αποδείξετε ότι ο R είναι σώμα ακριβώς τότε όταν ο R έχει μόνο δύο ιδεώδη.*