

**ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ**  
**Εαρινό Εξάμηνο 2017**  
**Διδάσκων: Ι. Α. Αντωνιάδης**

**Πρόοδος**  
**Ομάδα ΙΙ**  
**Ηράκλειο 5-4-2017**

**Θέμα 1.** *a) Να εξεταστεί αν το πολυώνυμο*

$$f(X) = X^6 - 70X^5 + 91X^4 - 119X^3 + 2527 \in \mathbb{Z}[X]$$

*είναι ανάγωγο στον δακτύλιο  $\mathbb{Q}[X]$ .*

*b) Να γράψετε ένα πολυώνυμο  $f(X) \in \mathbb{Z}[x]$  βαθμού  $\deg f(X) = 103$  τέτοιο ώστε το  $f(X)$  να είναι ανάγωγο στον  $\mathbb{Q}[X]$ .*

**Θέμα 2.** *Να αναλύσετε σε γινόμενο αναγώνων παραγόντων το πολυώνυμο  $X^6 - 1 \in \mathbb{Z}[X]$ .*

**Θέμα 3.** *Έστω  $R$  η ακεραία περιοχή  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ . Να αποδείξετε ότι η  $R$  είναι περιοχή ανάλυσης. Στην συνέχεια να αποδείξετε ότι το 2 είναι ανάγωγο στοιχείο του  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ . Είναι το 2 πρώτο στοιχείο του  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ; Τί συμπεραίνετε για την περιοχή  $R$ ;*

**Θέμα 4.** *Στον δακτύλιο  $R = \mathbb{Z}[X, Y]$  το κύριο ιδεώδες*

$$A = \langle X \rangle = \{Xf(X, Y) \mid f(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y]\}$$

*είναι πρώτο; Είναι maximal;*

**Θέμα 5.** *Έστω  $R$  ακεραία περιοχή. Να αποδείξετε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι μεταξύ τους ισοδύναμες:*

- (i) Η  $R$  είναι σώμα,*
- (ii) Η  $R[X]$  είναι ευκλείδεια περιοχή,*
- (iii) Η  $R[X]$  είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών.*