

M2426 – Εφαρμοσμένη Άλγεβρα

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

April 23, 2017

1. Δίνεται ο γραμμικός κώδικας C πάνω από το \mathbb{F}_9 , με πίνακα ελέγχου

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

όπου α είναι μία ρίζα του πολυωνύμου $X^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$. Βρείτε δύο μη μηδενικά διανύσματα του C τα οποία να έχουν ελάχιστο βάρος.

2. Έστω δύναμη πρώτου q . Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικός (μέχρι ισοδυναμίας) κώδικας Hamming πάνω από το \mathbb{F}_q , ο οποίος είναι MDS, ο οποίος έχει παραμέτρους $[q + 1, q - 1, 3]$. Δώστε ένα πίνακα ελέγχου του εν λόγω κώδικα Hamming, για $q = 4$.

3. Έστω C ένας $[n, k]$ κώδικας πάνω από το \mathbb{F}_q . Υποθέστε ότι για κάποιο $i \in \{1, \dots, n\}$, υπάρχει διάνυσμα $c = (c_1, \dots, c_n) \in C$, με $c_i \neq 0$. Αποδείξτε κάθε $a \in \mathbb{F}_q$ εμφανίζεται στην i συνεταγμένη σε ακριβώς q^{k-1} διανύσματα του κώδικα C .

4. Έστω $x, y \in \mathbb{F}_2^n$. Αποδείξτε τα παρακάτω:

- (a) Εάν $\|x\|$ και $\|y\|$ είναι άρτιοι, τότε $\|x + y\|$ είναι άρτιος.
(b) Εάν $\|x\|$ και $\|y\|$ είναι περιττοί, τότε $\|x + y\|$ είναι άρτιος.

5. Έστω C ένας $[n, k, d]$ γραμμικός κώδικας πάνω από το \mathbb{F}_2 . Υποθέτουμε ότι ο κώδικας C περιέχει κάποιο διάνυσμα c_1 περιττού βάρους. Ορίζουμε C_0 να είναι το σύνολο των διανυσμάτων του C με άρτιο βάρος.

- (a) Δείξτε ότι ο C_0 είναι γραμμικός υπόχωρος του C .
(b) Δείξτε ότι $C/C_0 = \{C_0, c_1 + C_0\}$.
(c) Δείξτε ότι ο C_0 είναι γραμμικός κώδικας πάνω από το \mathbb{F}_2 με παραμέτρους $[n, k - 1, d']$, όπου $d' = d$ εάν το d είναι άρτιος αριθμός και $d' > d$ εάν το d είναι περιττός αριθμός.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση.

6. Έστω $C_i, i = 1, 2$ γραμμικοί κώδικες πάνω από το \mathbb{F}_q με παραμέτρους $[n_i, k_i, d_i]$ αντίστοιχα. Βλέπουμε το εξωτερικό ευθύ άθροισμα $C_1 \oplus C_2$ ως υπόχωρο του $\mathbb{F}_q^{n_1+n_2}$. Αποδείξτε ότι ο $C_1 \oplus C_2$ είναι ένας $[n_1 + n_2, k_1 + k_2, \min\{d_1, d_2\}]$ γραμμικός κώδικας πάνω από το \mathbb{F}_q .