Γραμμικη Αλγεβρα I

Εαρινό Εξάμηνο 2017

Καθηγητές Π. Πάμφιλος – Ν.Γ. Τζανάκης

Εμβόλιμη εξέταση 31 Ιανουαρίου 2018

1. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$. Υπολογίστε διαγώνιο πίνακα D και ορθογώνιο πίνακα P, τέτοιους ώστε $P^T AP = D$. μον. 1

2. Στον $\mathbb{R}^3$, θεωρήστε τα διανύσματα $v_1 = (1, 1, -1)$ και $v_2 = (2, 2, 1)$. Υπολογίστε διάνυσμα w, με τις εξής ιδιότητες: Το w ανήκει στον υπόχωρο, που παράγουν τα v_1, v_2, είναι κάθετο στο v_1 και έχει μήκος 1. μον. 1

3. Έστω L ο τελεστής του μιγαδικού διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}^2$, που ορίζεται από τη σχέση $L(z_1, z_2) = ((2 + i)z_1 + (1 + 2i)z_2, -iz_1 + (1 - i)z_2)$. Υπολογίστε τον πίνακα του L ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \{(0, i),\ (-i, 0)\}$ του $\mathbb{C}^2$. μον. 1

4. Έστω ο μιγαδικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$, όπου $z, w \in \mathbb{C}$.

   (α′) Ποιες συνθήκες πρέπει και αρκεί να ικανοποιούν οι z, w για να είναι ο A ορθομοναδιαίος; μον. 0.5
   (β′) Έστω $z = (-2 + 4i)/11$ και $w = (1 - 10i)t$, όπου $t \in \mathbb{R}$. Υπολογίστε το t ώστε ο πίνακας A του ερωτήματος (α′) να είναι ορθομοναδιαίος. μον. 1

5. (α′) Ποιες συνθήκες πρέπει και αρκεί να ικανοποιούν οι μιγαδικοί a, b, c, d ώστε ο πίνακας $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ να είναι ερμιτιανός; μον. 0.5
   (β′) Έστω $z_1 = 1 + 2i, w_1 = 2 - 5i$. Αν $z_2 = x + iy$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$, ψπολογίστε τους x, y και τον μιγαδικό αριθμό w_2, ώστε ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 5z_1 - z_2 & w_1 \\ w_2 & (4z_1 - z_2)i \end{pmatrix}$ να είναι Ερμιτιανός. μον. 1

6. Έστω L ορθογώνιος τελεστής του $\mathbb{R}^2$ και τα διανύσματα $v, w \in \mathbb{R}^2$, για τα οποία είναι γνωστό ότι $L(v) = (3, 5)$ και $L(w) = (7, 12)$. Έστω διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^2$, τέτοιο ώστε, $\langle u, v\rangle = 1$ και $\langle u, w\rangle = 4$. Υπολογίστε το $L(u)$. μον. 1.5

7. Έστω L ερμιτιανός τελεστής του $\mathbb{R}^2$ και $u, v \in \mathbb{R}^2$. Τη (μη προσανατολισμένη) γωνία των $u, L(v)$ συμβολίζομε με θ και τη γωνία των $L(u), v$ συμβολίζομε με ϕ. Δίδονται τα εξής: $\| u \| = 1$, $\| v \| = 2$, $\| L(u) \| = 3$, $\| L(v) \| = 4$ και $\cos\theta = 1/3$. Υπολογίστε το $\cos\phi$. μον. 1.5

8. (α′) Έστω V ένας K-διανυσματικός χώρος διαστάσεως 3, L γραμμικός τελεστής του V και $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ βάση του V, με τις εξής ιδιότητες: Το v_1 είναι ιδιοδιάνυσμα του L και ο 2-διάστατος υπόχωρος W, που παράγουν τα v_1, v_2 είναι αναλλοίωτος από τον L, δηλαδή, $L(W) \subseteq W$. Αποδείξτε ότι ο πίνακας του L ως προς τη $\mathcal{B}$ είναι άνω τριγωνικός. μον. 0.5
   (β′) Έστω ο πίνακας $M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Υπολογίστε άνω τριγωνικό πίνακα U και ορθογώνιο πίνακα P, τέτοιους ώστε $P^T MP = U$. μον. 1