Πανεπιστημιο Κρητησ, Τμ. Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Παραμετρικη Στατιστικη, Φθινοπωρο 2014-15, Μιχ. Κολουντζακησ

Τελικό Διαγώνισμα

Πέμπτη 15 Ιαν. 2015

Πρόβλημα 1. Η ΤΜ (X, Y) είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο εσωτερικό της κλειστής πολυγωνικής γραμμής που έχει ως κορυφές τα σημεία του επιπέδου

$$(0, 0), (2a, 0), (2a, 2a), (a, 2a), (a, a), (0, a), (0, 0)$$

(με τη σειρά που δίνονται). Βρείτε μια συνάρτηση των X, Y που να είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου a.

Πρόβλημα 2. Οι ΤΜ $X_1, X_2, \ldots, X_N$ είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την κατανομή Poisson(λ). Βρείτε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας του λ δεδομένων των μετρήσεων $X_1, \ldots, X_N$ και βρείτε ποια τιμή του λ μεγιστοποιεί αυτή τη συνάρτηση.

Πρόβλημα 3. Οι ΤΜ $X_1, X_2, \ldots, X_N$ είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma = 10)$. Αν ο δειγματικός μέσος $\overline{X}$ των $X_1, X_2, \ldots, X_N$ προκύψει να είναι ίσος με 1000, βρείτε ένα διάστημα εμπιστοσύνης 90% για το μ. Στην απάντησή σας, εκτός από το N, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και τη συνάρτηση $\Phi(\cdot)$ (συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής $\mathcal{N}(0, 1)$) και την αντίστροφή της $\Phi^{-1}(\cdot)$.

Πρόβλημα 4. Δύο φυσικά μεγέθη X και Y ικανοποιούν ένα φυσικό νόμο της μορφής $Y = \lambda X^2$, όπου λ είναι μια άγνωστη σταθερά. Κάνουμε N μετρήσεις των φυσικών αυτών μεγεθών από τις οποίες προκύπτουν τα ζεύγη τιμών $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$ (οι μετρήσεις έχουν και σφάλματα και άρα οι τιμές αυτές δεν ικανοποιούν ακριβώς τις εξισώσεις $y_i = \lambda x_i^2$). Δείξτε πώς από τις μετρήσεις αυτές θα βρείτε μια εκτίμηση για το λ η οποία να ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων $\epsilon_i = y_i - \lambda x_i^2$.

Πρόβλημα 5. (α) Ορίστε την κατανομή χ_n^2.
(β) Αποδείξτε ότι αν οι ΤΜ X, Y είναι ανεξάρτητες και $X \sim \chi_m^2$, $Y \sim \chi_n^2$ τότε $X + Y \sim \chi_{m+n}^2$.

Όλες οι σημειώσεις πρέπει να είναι κλειστές. Οι αιτιολογήσεις σας να είναι πλήρεις και καθαρές. Απαντήσεις χωρίς πλήρη αιτιολόγηση δε παίρνουν μονάδες. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικών μέσων. **Διάρκεια 2 ώρες.**