# Διαγώνισμα Ιουνίου 2015

Τρίτη 16 Ιουνίου 2015

**Πρόβλημα 1.** Η ΤΜ $(X, Y, Z)$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο εσωτερικό της σφαίρας με κέντρο το $(0, 0, 0)$ και ακτίνα $R$. Βρείτε μια συνάρτηση του $X$ (και μόνο του $X$) που να είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της ποσότητας $R^2$.

**Πρόβλημα 2.** Έχουμε δύο κανονικούς πληθυσμούς $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$, και έστω $p \in (0, 1)$. Όλες οι παράμετροι $p, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ μας είναι άγνωστες. Τραβάμε $N$ ανεξάρτητα δείγματα από αυτούς τους δύο πληθυσμούς με την εξής διαδικασία: σε κάθε βήμα ρίχνουμε ένα νόμισμα με πιθανότητα κορώνας $p$ και αν το νόμισμα έρθει κορώνα τότε παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα από τον πρώτο πληθυσμό, αλλιώς παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα από το δεύτερο πληθυσμό.

Παίρνουμε έτσι τα δείγματα $x_1, x_2, \ldots, x_N$ (δε γνωρίζουμε από ποιο πληθυσμό προήλθε το καθένα).

Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας του δείγματος $x_1$ (εξαρτάται από τις παραμέτρους) καθώς και τη συνάρτηση πιθανοφάνειας των παραμέτρων αναφορικά προς το δείγμα.

**Πρόβλημα 3.** Οι ΤΜ $X_1, X_2, \ldots, X_N$ είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφες στο διάστημα
$$[a - 1, a + 1].$$
Αν ο δειγματικός μέσος των $X_j$ προκύψει να είναι ίσος με 1000 τότε χρησιμοποιείστε την κανονική προσέγγιση (εξηγείστε πλήρως το τι προσεγγίζετε με τι) και βρείτε ένα διάστημα εμπιστοσύνης 95% για το $a$. Στην απάντησή σας, εκτός από το $N$, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και τη συνάρτηση $\Phi(\cdot)$ (συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής $\mathcal{N}(0, 1)$) και την αντίστροφή της $\Phi^{-1}(\cdot)$.

**Πρόβλημα 4.** (α) Εξηγείστε σε ποιες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε την κατανομή $t$ όταν ψάχνουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο για δείγματα από κανονική κατανομή. Πώς ακριβώς χρησιμοποιείται τότε η κατανομή $t$;
(β) Εξηγείστε πώς εφαρμόζουμε την κανονική προσέγγιση στη διωνυμική κατανομή με τη μέθοδο Wald. Αν θέλουμε να διαπιστώσουμε τι ποσοστό ενός πληθυσμού είναι υπέρ μιας άποψης Α κάνουμε μια έρευνα σε τυχαίο κομμάτι μεγέθους $N$ του πληθυσμού και πάρουμε $k$ θετικές απαντήσεις και $N - k$ αρνητικές, πώς θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Wald στην εκτίμηση αυτού του ποσοστού και ενός διαστήματος εμπιστοσύνης 95% για το ποσοστό αυτό;

**Πρόβλημα 5.** Τα φυσικά μεγέθη $X, Y, Z$ ικανοποιούν ένα φυσικό νόμο της μορφής
$$Y = \lambda^2 X^2 + \lambda Z,$$
όπου $\lambda$ είναι μια άγνωστη σταθερά. Κάνουμε $N$ μετρήσεις των φυσικών αυτών μεγεθών από τις οποίες προκύπτουν οι τριάδες τιμών $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_N, y_N, z_N)$ (οι μετρήσεις έχουν και σφάλματα και άρα οι τιμές αυτές δεν ικανοποιούν ακριβώς τις εξισώσεις $y_i = \lambda^2 x_i^2 + \lambda z_i$).

Δείξτε πώς από τις μετρήσεις αυτές θα βρείτε μια τιμή για το $\lambda$ η οποία να ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων $\epsilon_i = y_i - \lambda^2 x_i^2 - \lambda z_i$. (Θα πρέπει να καταλήξετε σε ένα πολυώνυμο με γνωστούς (δηλ. υπολογίσιμους από το δείγμα) συντελεστές του οποίου το $\lambda$ είναι μια ρίζα.)

---

Όλες οι σημειώσεις πρέπει να είναι κλειστές. Οι αιτιολογήσεις σας να είναι πλήρεις και καθαρές. Απαντήσεις χωρίς πλήρη αιτιολόγηση δε παίρνουν μονάδες. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικών μέσων. **Διάρκεια 2 ώρες.**