Πανεπιστημιο Κρητησ, Τμ. Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Παραμετρικη Στατιστικη, Φθινοπωρο 2014-15, Μιχ. Κολουντζακησ

Διαγώνισμα Σεπτεμβρίου 2015

Πέμπτη 17 Σεπτεμβρίου 2015

Πρόβλημα 1. Το νόμισμα Α έχει πιθανότητα κορώνας p και το νόμισμα Β έχει πιθανότητα κορώνας q. Εκτελούμε δύο πειράματα.

Στο πρώτο πείραμα ρίχνουμε το ζεύγος νομισμάτων N φορές και καταγράφουμε μια ρίψη του ζεύγους ως επιτυχία αν και μόνο αν τουλάχιστον ένα από τα δύο νομίσματα ήρθε κορώνα. Στο δεύτερο πείραμα ρίχνουμε ομοίως το ζεύγος νομισμάτων N φορές και καταγράφουμε μια ρίψη του ζεύγους ως επιτυχία αν και μόνο αν ακριβώς ένα από τα δύο νομίσματα ήρθε κορώνα.

Ας είναι X και Y ο αριθμός επιτυχιών στο πρώτο και στο δεύτερο πείραμα αντίστοιχα. Βρείτε μια συνάρτηση των X, Y, N που να είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του αριθμού pq.

Πρόβλημα 2. Οι ανεξάρτητες μετρήσεις $X_1, X_2, \ldots, X_N$ έχουν ληφθεί από μια κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Δείξτε πώς από το δείγμα θα βρείτε εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας για τις παραμέτρους $\theta_1 = \mu, \theta_2 = \sigma^2$ της κατανομής.

Πρόβλημα 3. Χρησιμοποιώντας ροπογεννήτριες συναρτήσεις αποδείξτε ότι το άθροισμα δύο ανεξαρτήτων κανονικών $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ ακολουθεί επίσης κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ και υπολογίστε τα μ, σ μέσω των $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$.

Πρόβλημα 4. Οι ΤΜ $X_1, X_2, \ldots, X_N$ είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφες στο διάστημα

$$[a, a+1].$$

Αν ο δειγματικός μέσος των X_j προκύψει να είναι ίσος με 100 τότε χρησιμοποιείστε την κανονική προσέγγιση (εξηγείστε πλήρως το τι προσεγγίζετε με τι) και βρείτε ένα διάστημα εμπιστοσύνης 90% για το a.

Στην απάντησή σας, εκτός από το N, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και τη συνάρτηση $\Phi(\cdot)$ (συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής $\mathcal{N}(0,1)$) και την αντίστροφή της $\Phi^{-1}(\cdot)$.

Πρόβλημα 5. Τρία φυσικά μεγέθη X, Y, Z ικανοποιούν ένα φυσικό νόμο της μορφής

$$Z = \lambda X + \mu Y,$$

όπου λ, μ είναι δύο άγνωστες σταθερές. Κάνουμε N μετρήσεις των φυσικών αυτών μεγεθών από τις οποίες προκύπτουν οι μετρήσεις $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_N, y_N, z_N)$ (οι μετρήσεις έχουν και σφάλματα και άρα οι τιμές αυτές δεν ικανοποιούν ακριβώς τις εξισώσεις $z_i = \lambda x_i + \mu y_i$). Δείξτε πώς από τις μετρήσεις αυτές θα βρείτε μια εκτίμηση για τα λ, μ η οποία να ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων $\epsilon_i = z_i - \lambda x_i - \mu y_i$. (Δε χρειάζεται να υπολογίσετε πλήρως τις εκφράσεις για τα λ, μ. Αρκεί να υποδείξετε ένα 2×2 γραμμικό σύστημα λύση του οποίου είναι τα λ, μ.)

Όλες οι σημειώσεις πρέπει να είναι κλειστές. Οι αιτιολογήσεις σας να είναι πλήρεις και καθαρές. Απαντήσεις χωρίς πλήρη αιτιολόγηση δε παίρνουν μονάδες. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικών μέσων. **Διάρκεια 2 ώρες.**