Ασκήσεις Στατιστικής (Μέγιστη Πιθανοφάνεια)

	Εκτιμήσεις Μέγιστης Πιθανοφάνειας
1	Για μια ΤΜ που είναι ομοιόμορφη στο $[0, \theta]$ αποδείξτε ότι το μέγιστο του δείγματος $X_1, \ldots, X_N$ είναι εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας για το θ. Δείξτε επίσης ότι αυτή η εκτιμήτρια δεν είναι αμερόληπτη και υπολογίστε τη μέση τιμή της ως συνάρτηση του θ και του N. Κατασκευάστε τώρα μια αμερόληπτη εκτιμήτρια που προκύπτει από αυτήν.
2	**Example 2:** Suppose $X_1, X_2, \cdots, X_n$ are i.i.d. random variables with density function $f(x\|\sigma) = \frac{1}{2\sigma} \exp\left(-\frac{\|x\|}{\sigma}\right)$, please find the maximum likelihood estimate of σ. (Ορολογία: iid = ανεξάρτητες και ισόνομες)
3	**Exercise 3:** Gamma distribution has a density function as $$f(x\|\alpha, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \text{ with } \quad 0 \leq x < \infty.$$ Suppose the parameter α is known, please find the MLE of λ based on an i.i.d. sample $X_1, \cdots, X_n$. (Ορολογία: MLE=Maximum Likelihood Estimator=Εκτιμήτρια Μέγιστης Πιθανοφάνειας)
4	**Exercise 5:** Suppose that $X_1, \cdots, X_n$ form a random sample from a distribution for which the pdf $f(x\|\theta)$ is as follows: $$f(x\|\theta) = \frac{1}{2} e^{-\|x-\theta\|} \quad \text{for} \quad -\infty < x < \infty$$ Also suppose that the value of θ is unknown $(-\infty < \theta < \infty)$. Find the MLE of θ. (Ορολογία: random sample=τυχαίο δείγμα, pdf=probability density function=συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.)

5	**Problem (MLE and geometric distribution)** *We consider a sample $X_1, X_2, .., X_N$ of i.i.d. discrete random variables, where X_i has a geometric distribution with a pmf given by:* $$f_X(x, \theta) = \Pr(X = x) = \theta \times (1-\theta)^{x-1} \qquad \forall x \in \{1, 2, 3, ..\}$$ *where the success probability θ satisfies $0 < \theta < 1$ and is unknown. We assume that:* $$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\theta} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1-\theta}{\theta^2}$$ **Question 1:** *Write the log-likelihood function of the sample $\{x_1, x_2, ..x_N\}$.* **Problem (MLE and geometric distribution)** **Question 2:** *Determine the maximum likelihood estimator of the success probability θ.*
6	2. Suppose now that p takes values in $\{\frac{1}{2}, 1\}$. Note that this Bernoulli distribution would model a coin that is either fair or two-headed. Then the maximum likelihood estimator of p is the statistic $$U = \begin{cases} 1, & Y = n \\ \frac{1}{2}, & Y < n \end{cases}$$ (Δηλ. Ρίχνουμε νόμισμα που είτε είναι τίμιο είτε φέρνει πάντα κορώνα. Η ΤΜ Y δείχνει το πόσες κορώνες φέραμε σε n ρίψεις.)
7	Στις παρακάτω ασκήσεις ρίχνουμε ένα νόμισμα (coin) ή ένα ζάρι (die) και ζητούμε να υπολογίσουμε την πιθανοφάνεια (likelihood) του p δεδομένουν κάποιου αποτελέσματος. Εδή p είναι η πιθανότητα να έρθει το νόμισμα κορώνα (heads) ή το ζάρι να έρθει 6. Find the likelihood as a function of the binomial proportion p for each of the following, and evaluate at the expected value of p (use $1/2$ for a fair coin and $1/6$ for a fair die). • EXERCISE **8.1.7** Flipping 2 out of 4 heads with a fair coin. • EXERCISE **8.1.8** Rolling 2 out of 4 6's with a fair die. Why is the likelihood smaller than the answer to previous problem? • EXERCISE **8.1.9** Flipping 2 out of 12 heads with a fair coin. • EXERCISE **8.1.10** Rolling 2 out of 12 6's with a fair die. Why is the likelihood larger than the answer to previous problem?

8	Two couples are trying to have more girl babies. For each, find the likelihood function for the fraction q of female sperm and the maximum likelihood, and compare with the likelihood of $q = 0.5$. • EXERCISE **8.1.31** The first couple has 7 boys before having a girl. Use the geometric distribution to build the likelihood as a function of q. • EXERCISE **8.1.32** Another couple has 4 boys, then 1 girl, then 3 more boys. Find the likelihood as a function of q.